Algebra

I *aritmetikk* gjør vi operasjoner på tall. Vi ganger, deler, legger sammen og trekker fra. Trekker ut kvadratrot og mye annet. Vi har regler for hva som må gjøres først og hva som er lovlig. Mange vil kalle det *regning*.

Eksempel 1

$5·7+5·3$

Dette kan regnes ut slik: $35+15 = 50$

I **algebra** gjør vi det samme, men vi bruker *symboler* istedenfor noen av tallene. Vi regner med symboler. På den måten blir det vi regner ut generelt og kan brukes på alle tall. Vi gjør en regneoperasjon én gang på et mønster. Da blir aritmetikken enklere, fordi vi allerede har løst problemet generelt[1].

Eksempel 2

$ab+ac = a(b+c)$

Setter vi inn tallene fra første eksempel, ser vi at $5·7+5·3=5(7+3)=5·10=50$

Eksempel 3

$(a+b)^2 =(a+b)(a+b) = aa+ab+ba+bb = a^2+2ab+b^2$

Dette mønsteret kalles «første kvadratsetning». Anta nå har vi har en likning slik:

$(x+3)^2-x^2 = 9$

Da kan vi «løse opp» den første parentesen ved å bruke mønsteret fra «første kvadratsetning» og får

$(x^2+2·x·3+3^2)-x^2 = 9$

$6x+9 = 9$

$6x=0$

$\underline{\underline{x = 0}}$

Oppgave: Sjekk at svaret stemmer ved å sette inn x=0 i den opprinnelige likningen!

Oversikt

Her er en oversikt over elementær algebra, hentet fra Wikipedia:

Operasjon	Er skrevet	Kommutativitet	Assosiativitet	Identitetselement	Invers funksjon
Addisjon	$a + b$	$a + b = b + a$	$(a + b) + c = a + (b + c)$	0, som bevarer tall: $a + 0 = a$	Subtraksjon (-)
Multiplikasjon	$a \times b$ eller $a \bullet b$	$a \times b = b \times a$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$	1, som bevarer tall: $a \times 1 = a$	Divisjon (/)
Potens	a^b eller a ^ b	Ikke kommutativ $a^b \neq b^a$	Ikke assosiativ	1, som bevarer tall: $a^1 = a$	Logaritme (Log)

I tillegg til de enkle operasjonene pluss/minus, gange/dele og potens/logaritme, brukes mye parenteser til å knytte ting sammen. I aritmetikken vil vi gjerne slå sammen tallene inne i en parentes, slik: $4(5+1)=4·6=24$. Når vi har bokstaver er det ikke så enkelt, f.eks. $4(a+1)$. Når vi ikke vet hvilket tall *a* står for, kan vi jo ikke legge til 1. Allikevel kan uttrykkene ofte forenkles, ved hjelp av generelle regler. Her er noen av dem:

[1] Ifølge Wikipedia er ordet algebra er opprinnelig arabisk (*al-jabr*) og betyr «forening, kombinasjon». Det dreier seg altså om å kombinere symboler på forskjellig vis. Algebraen er ekstremt nyttig del av matematikken. Dere møter algebraen som en generell disiplin, men særlig i likninger. I likninger har vi jo nettopp symboler (ofte *x*) som representerer et ukjent tall.

1. a+(a+b)=a+a+b=2a+b – vi løser opp parentesen og legger sammen. Pass på:
   -(a+b)=-a-b og -(a-b)=-a+b – når vi løser opp en parentes med minus-tegn foran, bytter vi fortegn for alle ledd i parentesen
2. a(a+b)=a^2+ab – vi ganger alle ledd i parentesen med a. Motsatt kan felles faktorer for flere ledd settes utenfor en parentes: ab+ac=a(b+c)
3. (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd – alle ledd i første parentes ganges med alle ledd i andre parentes. Pass på fortegn: (a+b)(c-d)=ac-ad+bc-bd og (a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd

Regel 3 kan vi bruke til å finne et generelt uttrykk for parenteser som kvadreres. Da kaller vi c for a og d for b og får:

4. $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a\cdot a+ab+ba+b\cdot b=a^2+2ab+b^2$ – første kvadratsetning

Oppgave 1: Finn selv reglene for setning 5 og 6 nedenfor. Den første kalles "andre kvadratsetning", den andre kalles "tredje kvadratsetning". Du ser sikkert at setning 6 ikke gjelder kvadrat i det hele tatt. Egentlig heter den konjugatsetningen.

5. $(a-b)^2=$ ________
6. (a+b)(a-b)= ________

Brøker

Du kan sikkert regne med brøker. Da vet du f.eks. at

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$

Videre vet du at

$$\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

Og at

$$\frac{4+1}{2}=\frac{4}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \text{ eller } 2+\frac{1}{2} \text{ som vanligvis skrives bare } 2\frac{1}{2}$$

Du kan gjøre helt tilsvarende, selv om noen av tallene er erstattet av bokstaver:

$$\frac{a}{2}+\frac{a}{3}=\frac{3a}{6}+\frac{2a}{6}=\frac{3a+2a}{6}=\frac{5a}{6} \text{ eller } \frac{5}{6}a$$

Og

$$\frac{9a}{6a}=\frac{3a}{2a}=\frac{3}{2}$$

Den siste forkortningen (dele med a over og under brøkstreken) krever at $a \neq 0$ (hvorfor?). Du ser også at

$$\frac{4+a}{2}=\frac{4}{2}+\frac{a}{2}=2+\frac{a}{2}$$

Ja da vet du svært mye om algebra. Det er bare å prøve på noen oppgaver:

$\frac{(a+b)(a-b)}{a^2}$ der $a \neq 0$ (hvorfor?)

$(a+b)^2-a^2$

$(a+b)(a-b)-b^2$

Vis at: $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

Ta nødvendige forutsetninger og vis ved forkortning at: $\frac{(a+2)(a-1)}{2(a-1)a}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a}$

Ta nødvendige forutsetninger og vis at: $\frac{\mu^2(a+1)}{\mu(1+a)}=\mu$

Potenser

Dere har sikkert sett i alle fall to viktige setninger og kanskje flere[2]:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

[2] Hvis det er stemning for det, har jeg forberedt et grundigere gjennomgang med mange flere regler og mange definisjoner.

2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Kos dere nå med videoene på
http://www.getsmart.no/no/videos/topic/grunnleggende_regler_i_algebra
før vi bruker algebraen i løsning av *likninger*.

Flere oppgaver i algebra

Du finner mange oppgaver på Internett. Start gjerne med oppgavene i pkt 1.2 i dokumentet du finner på http://ndla.no/nb/node/59854. (Dette er oppgaver for videregående, så det vil være stilig å klare dem☺.)

Oppgave 2: Regn ut $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\cdot\ldots\cdot(x-z)$=? *Vink:* Tenk nøye igjennom hvilke ledd som dukker opp mellom første og siste. (Fra matematikk.org)

Oppgave 3: Et arveproblem (fra matematikk.org – en «klassiker»):
3 brødre har arvet 17 hester etter sin far. Den eldste sønnen skal ha halvparten av hestene, den nest eldste skal ha en tredjedel og den yngste skal ha en niendedel. Etter å ha klødd seg i hodet en stund, ber de farens beste venn om hjelp.
Han henter sin egen hest, slik at det nå er 18 hester totalt. Så deler han ut halvparten (9 hester) til den eldste sønnen, en tredjedel (6 hester) til den nest eldste og en niendedel (2 hester) til den yngste. Så drar han hjem med sin gamle hest, og problemet er ute av verden. Eller er det i realiteten det?
Vink: Set opp brøkene i testamentet og summer dem!

Illustrert av Birthe Lohne Løvdal

Oppgave 4: Regn ut: $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}$ =?

Oppgave 5: Finnes det et tosifret tall som er like stort som sin egen tverrsum?
Vink: Oppgaven er hentet fra matematikk.org. De har et resonnement her som jeg ikke skjønner, nemlig: «Tverrsummen må bli et tosifret tall, og den største tverrsummen for et tosifret tall vil vi finne hos tallet 99 (tverrsum = 18), og den minste har tallet 10.» Altså finnes det ikke noe slikt tall, mener de (hæ???). Jeg løser det heller med algebra og bruker *a>0* for første siffer og *b* for det andre.