Potenser

Note: Mye av dette er sikkert repetisjon, men kanskje kommer vi lenger og/eller dypere. Det er i alle fall mitt håp☺.

Definisjon/forklaring

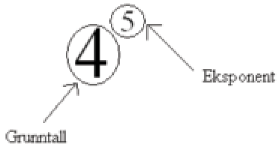
Noen ganger har vi bruk for å skrive produkter der samme faktor går igjen mange ganger.
Istedenfor å skrive

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

Kan vi kortere skrive

4^5

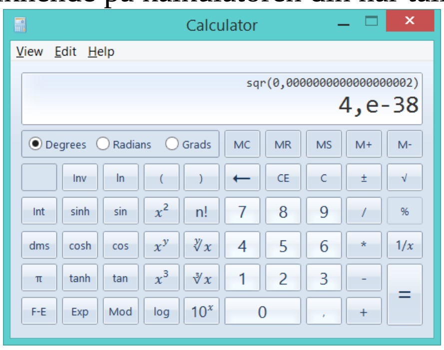
Denne skrivemåten kalles *potens*. Tallet 4 kalles *grunntallet* og tallet 5 kalles *eksponenten*. Det er grunntallet som skal ganges sammen. Eksponenten angir hvor mange ganger grunntallet skal ganges med seg selv.

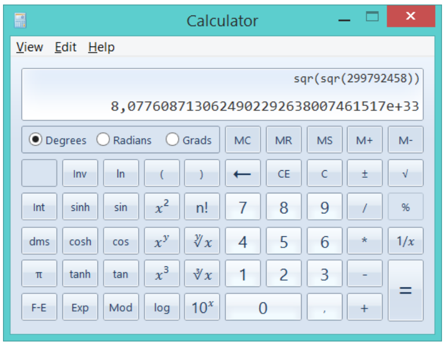


Både grunntallet og eksponenten kan være et hvilket som helst tall på tallinjen, heltall eller brøk, negativt eller positivt. Det er de tallene vi kaller reelle tall.

En fin bruk av potenser er til å skrive store tall. Da bruker man 10 som grunntall. F.eks. er lyshastigheten *c* i vakuum m/s. Det er omtrent 300 000 000 m/s som også kan skrives $3 \cdot 10^8$ m/s. Hvis vi vil ha flere desimaler, kan vi også skrive $2{,}99 \cdot 10^8$ eller $299 \cdot 10^6$.

Når grunntallet er 10, angir eksponenten hvor mange nuller som må legges til, f.eks. $5 \cdot 10^2 = 5 \cdot 100 = 500$ (femtall pluss to nuller) og $31415 \cdot 10^{-4} = 3{,}1415$ (flytt komma fire plasser mot venstre). Alle desimaltall lagres med en variant av denne metoden i datamaskiner og du har sikkert også sett noe liknende på kalkulatoren din når tall blir for store/små til å vises.





I bildene ovenfor er det kalkulatoren i Windows som har fått problemer med et svært lite og et svært stort tall. Bokstaven *e* står for «eksponent» og grunntallet er alltid 10 i denne kalkulatoren.

Bureau International des Poids et Mesures

I det internasjonale, metriske systemet har potensene av 10 fått egne navn som forstavelse: 10^1=deka, 10^2=hekto, 10^3=kilo osv. Disse kan settes foran et mål som i hektogram, kilometer osv. Det er også forstavelser for negative eksponenter som 10^{-1}=desi, 10^{-3}=milli osv. Du finner en komplett liste nett, f.eks. på hjemmesidene til «BIPD» på http://www.bipm.org/en/measurement-units/prefixes.html.

Fun fact: En *Googol* er definert lik 10^{100}. Ordet ble visstnok funnet på av en ni-åring. Det brukes lite i matematikken men har fått status som «kult». Selskapet Google er oppkalt etter det. Tallet er større enn det antatte antallet primærpartikler i universet ($2{,}5 \cdot 10^{89}$).

Multiplikasjon av potenser

To potenser med samme grunntall kan ganges med hverandre. F.eks. kan vi ha

$$2^3 \cdot 2^2$$

Som er lik

$$\underbrace{(2\cdot2\cdot2)}_{\text{3 ganger}} \cdot \underbrace{(2\cdot2)}_{\text{2 ganger}} = 2^5$$

Det ser ut til at vi kan beholde grunntallet og summere eksponentene. Med bokstaver ser vi *generelt*:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{\text{m ganger}} \cdot \underbrace{(a\cdot a\cdot \ldots \cdot a)}_{\text{n ganger}} = a^{m+n}$$

Siden vi her brukte bokstaver, vet vi at følgende gjelder generelt:

Setning 1: $\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

Vi ser lett at siden faktorene kan byttes om i multiplikasjon (multiplikasjon er kommutativ), spiller det ingen rolle om *m* eller *n* er størst. Men legg merke til at potensene i produktet har samme grunntall, her *a*.

Divisjon av potenser

To potenser med samme grunntall kan også deles med hverandre, f.eks.

$$\frac{2^5}{2^3}$$

Som er lik

$$\frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}{2\cdot2\cdot2} \text{ som forkortet gir } \frac{2\cdot2\cdot2}{1} = 2^3$$

Det ser ut til at vi kan subtrahere eksponenten i nevneren fra eksponenten i telleren. Med bostaver finner vi:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}^{\text{m ganger}}}{\underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{\text{n ganger}}} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}^{\text{m-n ganger}}}{1} = a^{m-n}$$ etter forkortning av *n* *a*-er. Da må *a* være ulikt 0.

Igjen bør du merke deg at der er samme grunntall i teller og nevner.

Setning 2: $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ **for a≠0.**

Fun fact: Et eksempel er å beregne hvor mange ganger jorden kan plasseres langs solens diameter. Jordens diameter ved ekvator er omtrent 12 756 km ($12{,}756 \cdot 10^6$m) og solens diameter er ca 1 392 000 km ($1{,}392 \cdot 10^9$m). Vi bruker meter og 10-erpotenser, og regner:

$$\frac{1{,}392 \cdot 10^9 m}{12{,}756 \cdot 10^6 m} \approx 0{,}109 \cdot \frac{10^9}{10^6} = 0{,}109 \cdot 10^{9-6} = 0{,}109 \cdot 10^3 = 109$$

Det går altså omtrent 109 jordkloder langs solens diameter.

Potens av potens

En potens kan være grunntall som igjen er opphøyd i en eksponent:

$$(2^4)^3 = \underbrace{\underbrace{(2\cdot2\cdot2\cdot2)}_{\text{4 2-ere}} \cdot (2\cdot2\cdot2\cdot2) \cdot (2\cdot2\cdot2\cdot2)}_{\text{3 parenteser}} = 2^{12}$$

På tilsvarende måte som ovenfor, kan vi vise at dette gjelder generelt for a, m og n:

> **Setning 3:** $\quad (\boldsymbol{a^m})^{\boldsymbol{n}} = \mathbf{a^{m \cdot n}}$

Da rekkefølgen av faktorene i eksponenten kan byttes (kommutativt) følger også at $(\boldsymbol{a^n})^{\boldsymbol{m}} = (\boldsymbol{a^m})^{\boldsymbol{n}}$. Du ser sikkert lett at det er rimelig hvis du bytter eksponent 4 og 3 i eksemplet $(2^4)^3$ ovenfor.

Fun fact: Volumet av en kule er proporsjonalt (dvs. «øker med») radien i tredje potens. Det var plass til $1{,}09\cdot10^2$ jordkloder langs solens diameter. Da er det plass til

$$(1{,}09 \cdot 10^2)^3 = 1{,}09^3 \cdot 10^{2\cdot3} \approx 1{,}295029 \cdot 10^6 = 1\,295\,029$$

jordkloder inne i solen.

Grunntallet er en brøk

La oss først ta et enkelt eksempel:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2}{3\cdot3\cdot3\cdot3} = \frac{2^4}{3^4}$$

Vi multipliserer her to brøker ved å multiplisere teller og nevner hver for seg.

Ved å gjøre det samme med a, b og m får vi generelt:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ \dots\ \cdot\frac{a}{b}}_{\text{m ganger}} = \underbrace{\frac{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}}_{\text{m ganger}} = \frac{a^m}{b^m}$$

> **Setning 4:** $\quad \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{m}} = \frac{\boldsymbol{a^m}}{\boldsymbol{b^m}}$ **for b≠0**

Grunntallet er et produkt

Grunntallet kan også være et produkt:

$$(2\pi)^3$$

Her kan vi selvsagt først regne ut $2\cdot\pi$ og så ta det i tredje potens[1], men det blir unøyaktig (hvorfor?). Isteden kan vi regne ut «den lange veien», deretter ordne faktorene og så se hva vi får:

$$(2\pi)^3 = 2\cdot\pi\cdot2\cdot\pi\cdot2\pi = 2\cdot2\cdot2\cdot\pi\cdot\pi\cdot\pi = 2^3\cdot\pi^3$$

---

[1] I dette enkle eksemplet bruker jeg bevisst ikke to tall. Hvis det hadde stått $(2\cdot4)^3$ så ville du sikkert like gjerne ganget 2 med 4 først og så brukt eksponenten etterpå.

Det ser altså ut til at vi kan opphøye hvert produktledd i parentesen med eksponenten. Vi viser dette generelt på samme måte som vi har gjort gjentatte ganger ovenfor, og får generelt:

Setning 5: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

Oppgave 1: Regn ut $(2 \cdot 4)^3$ på begge måter og se at du får samme svar.

Noen ekstra definisjoner med begrunnelse

a. Eksponenten er 0 (null)

Hvis vi har uttrykket

$$\frac{a^m}{a^m} = 1 \text{ når } a \neq 0 \text{ (fordi teller og nevner er like)}$$

Vil vi etter setning 2 (om divisjon) få

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$$

Så hvis setningene våre skal gjelde også når nevner og teller er like, må altså a^0 være 1.

Definisjon A: $\boldsymbol{a^0 \triangleq 1}$ **for alle** $a \neq 0$**.**

Dette er altså bare en *definisjon* – det vil ellers virke meningsløst å ha 0 som eksponent.

OBS! $\mathbf{0^0}$ **er *udefinert* og har ingen mening.**

b. Eksponenten er negativ

Hvis vi har en brøk med potens i både teller og nevner (og samme grunntall) der eksponenten i nevneren er større enn telleren, vil vi ende med en *negativ* eksponent i svaret. F.eks.

$$\frac{2^2}{2^5}$$

Vi ser jo at svaret skal bli $\frac{1}{2^3}$ etter forkortning, men etter setning 2 (divisjon) blir svaret 2^{-3}. For at setningene skal gjelde, definerer vi derfor negativ eksponent slik:

Definisjon B: $\boldsymbol{a^{-m} \triangleq \frac{1}{a^m}}$ **for** $a \neq 0$ **og** $m > 0$

c. Eksponenten er en brøk

Først skal vi se på eksponenter der telleren er 1. Hvis vi har $3^{\frac{1}{2}}$ kan vi bruke setning 3 (potens av potens) og regne slik:

$$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 3^1 = 3$$

Tallet $3^{\frac{1}{2}}$ er altså et tall som kvadrert gir 3. Det tallet skriver vi vanligvis som kvadratroten av 3 eller $\sqrt[2]{3}$.

Helt tilsvarende blir det hvis eksponenten er $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ eller en annen brøk med 1 i telleren. Igjen må vi foreta en definisjon for at setningene skal gjelde:

Definisjon C_{temp}: $\boldsymbol{a^{\frac{1}{m}} \triangleq \sqrt[m]{a}}$

Hva så hvis eksponenten ikke har 1 i telleren? Da kan vi igjen bruke setning 3 (potens av potens) og får f.eks.

$$\left(4^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 4^{\frac{3}{2}\cdot 2} = 4^3$$

Tallet $4^{\frac{3}{2}}$ er altså et tall som gir 4^3 når det kvadreres. Det tallet skriver vi vanligvis som kvadratroten av 4^3 eller $\sqrt[2]{4^3}$.

Helt tilsvarende blir det med en annen eksponent, så vi definerer:

Definisjon C: $\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} \triangleq \sqrt[n]{a^m}}$

Hvis du ser nøye etter, så ser du nok at definisjon C_{temp} bare er en spesialversjon av C der m=1. Vi trenger derfor ikke definisjon C_{temp}.

Potenser – oppsummering

Setninger

Setning 1: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Setning 2: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ **for a≠0.**

Setning 3: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Setning 4: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ **for b≠0**

Setning 5: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

Pass på at ingen setninger gjelder for 0^0!

Definisjoner

Definisjon A: $a^0 \triangleq 1$ **for alle a≠0. OBS! 0^0 er *udefinert* og har ingen mening.**

Definisjon B: $a^{-m} \triangleq \frac{1}{a^m}$ **for a≠0 og m>0**

Definisjon C_{temp}: $a^{\frac{1}{m}} \triangleq \sqrt[m]{a}$

Definisjon C: $a^{\frac{m}{n}} \triangleq \sqrt[n]{a^m}$

Oppgave 2: Ingen av setningene ovenfor må forstås slik at de gjelder for 0^0. Sett selv opp kravene til *a*, *b*, *m* og *n* for alle setningene 1 til 5.

Oppgave 3: Her en noen kompliserte potenser. Bruk setningene og definisjonene og skriv dem så enkelt som mulig:

Spm. 1: $27^{\frac{1}{12}} \cdot 27^{\frac{1}{4}} =?$

Spm. 2: $\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 =?$

Spm. 3: $9^{-\frac{1}{2}} =?$

Spm. 4: $\left(64^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} =?$

Spm. 5: $\frac{6^2}{6^3}\pi =?$

Spm. 6: $\frac{(2\pi)^2}{\pi} =?$

Spm. 7: $\lim\limits_{m\to 4} 5^{4-m} =?$

Her er *m* en variabel som starter med å være forskjellig fra 4, men hva blir verdien av 5^{4-m} når *m* nærmer seg 4?

I følgende doble rotuttrykk, finner vi lett svaret ved å starte innerst med kvadratroten:

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Svaret er det samme som for $\sqrt[6]{64}$. Det kan altså se ut til at generelt gjelder

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}.$$

Spm. 8: Bevis den generelle formelen for doble rotuttrykk.
Vink: Bruk definisjon C ovenfor og skriv først røttene som potenser med eksponenten som en brøk og anvend deretter setning 3 før du avslutter med definisjon C igjen.

Spm. 9: Vis at følgende setning også gjelder:

$$\sqrt[l]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}} = \sqrt[l\cdot m\cdot n]{a}$$