Sannsynligheter

Vi snakker gjerne om at det er «sannsynlig» at noe skal skje – eller at det er «50% sannsynlig» at det skal skje. Hva betyr det egentlig?

Sannsynlighetsteori er en gren av matematikken som ser på sannsynligheter. Her er en liten innføring i sannsynlighetsteorien.

Størrelsen av sannsynligheter

I sannsynlighetsteorien blir sannsynligheter angitt med et tall fra og med 0 (vil helt sikkert ikke skje) til og med 1 (vil helt sikkert skje). Man kan naturligvis gjerne bruke prosenter fra 0% til 100% tilsvarende.

Man gjør *forsøk* også kalt *eksperimenter* som har et *resultat* kalt *utfall* og *sannsynligheten* angir da sjansen for at ett bestemt utfall skal inntreffe.

Deterministisk, stokastisk og kaotisk

Deterministisk

Når noe helt sikkert vil skje, sier vi at det er «100% sikkert». Egentlig mener vi da at sannsynligheten for at det skal skje er 100% eller 1. Forsøket kan da bare ha ett, eneste utfall. Det samme vil skje hver eneste gang. Et slikt forsøk sies å være **deterministisk**.

Eksempel 1: Hva vil skje hvis jeg slipper en blyant over bordet? De fleste vil nok mene at den kommer til å falle ned på bordet. Hvordan kan vi vite det? Jo, vi har sett det gang på gang og *aldri* opplevd noe annet. Forsøket må kalles deterministisk – det eneste mulige utfallet er at blyanten faller ned.

Stokastisk

I andre situasjoner kan et forsøk ha *flere* utfall. På forhånd kan vi ikke vite hvilket utall som blir resultatet denne gangen. Kanskje vet vi hvilke utfall som er *mulige* og hvor ofte de forekommer. Forsøket sies da å være **stokastisk**. De forskjellige utfallene inntreffer mer eller mindre ofte. Vi klarer ikke å forutsi ett, enkelt forsøk, men vi kan si noe om hvor ofte de forskjellige utfallene opptrer hvis vi gjør forsøket mange ganger. Andelen av utfallet i forhold til antall forsøk i det lange løp, kaller vi sannsynligheten for utfallet. Det er en brøk fra 0 til 1.

Eksempel 2: Vi kaster «kron og mynt». Når vi kaster én gang, kan vi ikke vite om det blir «kron» eller «mynt». Vi mener imidlertid å vite at det blir ca ½-parten «kron» og ½-parten «mynt» i det lange løp. Da anslår vi sannsynligheten for at et forsøk skal få utfallet «kron» til ½ eller 50%. Dette kan skrives litt forenklet slik:

P(K) = P(«mynten ender med å vise kron») = ½ = 50%

som vi leser som «sannsynligheten for at forsøket kast med kron og mynt skal få utfallet «kron» er ½ = 50%». (P står for probability, engelsk for sannsynlighet.)

Hvis vi setter opp alle utfallene, får vi følgende tabell:

P(K) = ½ = 50%
P(M) = ½ = 50%
P(K U M) = 1 = 100% som er sannsynligheten for enten «kron» eller «mynt»[1]

Dette kalles forsøkets *sannsynlighetsfordeling*.

[1] U står for union og leses «eller»

Merk at summen av sannsynligheten for alle mulige utfall til sammen alltid er 1. Det er jo sikkert (deterministisk) at ett av dem vil inntreffe.

Hvordan kan vi vite hva sannsynligheten for et utfall er? Vi gjør mange forsøk og teller opp. Sannsynlighet er altså *erfaringsbasert*. Egentlig forsøker vi å estimere (gjette) på hva andelen av dette utfallet ville bli hvis vi tellet opp uendelig mange forsøk. Det kan vi naturligvis ikke gjøre – det vil ta uendelig lang tid – derfor er sannsynligheter alltid et anslag.

For «kron og mynt» er f.eks. $P(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{K}{n}$ dvs. grensen som andelen K nærmer seg når antall forsøk *n* går mot uendelig.

Vi kan bruke sannsynligheter til å beregne sannsynligheten for kombinasjoner av utfall, men vi må da kjenne den underliggende sannsynlighetsfordelingen for ett, enkelt forsøk.

Eksempel 3A: Vi kaster to mynter opp samtidig, og lurer på – før vi kaster – hva som er sannsynligheten for å få "kron" på begge de to myntene. En måte å finne dette på er å liste opp alle mulige kombinasjoner av utfall, og så finne andelen av dem vi er ute etter:

K∩K
M∩M
én av hver

Her forekommer K∩K én gang av tre, altså skulle sannsynligheten bli 1/3-del. Det viser seg at ved å forsøke noen få ganger, så blir sannsynligheten for K∩K nær ¼. Det må skyldes at vi har tenkt feil på noe vis! Siden vi er opptatt av at sannsynligheten er erfaringsbasert, og erfaringen viser oss at vi har tenkt feil, så må modellen vår endres.

Eksempel 3B: Vi kaster kron og mynt opp, men denne gang er den ene malt rød og den andre grønn. Igjen lurer vi hva som er sannsynligheten for å få «kron» begge gangene? En måte å finne dette på er å liste opp alle mulige kombinasjoner av utfall, og så finne andelen av dem vi er ute etter:

Blå K ∩ grønn K
Blå K ∩ grønn M
Blå M ∩ grønn K
Blå M ∩ grønn M

Her forekommer K∩K en gang av fire. Vi antar at alle kombinasjonene er like sannsynlige, og får følgende sannsynlighetsfordeling:

P(K∩K) = ¼
P(K∩M) = ¼
P(M∩K) = ¼
P(M∩M) = ¼
Sum: 1

Sannsynligheten for å få to kron på rad er altså ¼. Denne teknikken kalles «gunstige på mulige».

En annen måte å finne dette på er å anta at sannsynlighetsfordelingen er som angitt ovenfor (50/50). Da er sannsynligheten for å få «kron» to ganger på to forsøk:

P(K∩K) = P(K) · P(K) = ½ · ½ = ¼
eller i prosenter: 50% · 50% = 25%

Sannsynlighetsteorien gir oss altså muligheter for å regne med sannsynlighetene, men merk at sannsynlighetsfordelingen må være kjent.

Kaotisk

I noen situasjoner kan vi forutsi utfallet på kort sikt men ikke på lang sikt. Situasjonen er slik at forsøket er deterministisk over kort tid, men stokastisk over lang. Slike situasjoner kalles **kaotiske**. Det har vært mye vitenskapelig interesse om dette i *kaosteorien* siden 1950-årene. Forsøkene er da slik at en liten endring i utgangstilstanden *over tid* medfører store, uforutsigbare endringer i utfallet.

Eksempel 4: Ofte kan vi med sikkerhet si at solen vil skinne om fem minutter, for det er ikke en sky å se på himmelen (og det er lenge til neste solformørkelse☺). Skal vi mene noe om være julaften neste år, må vi angi muligheten for sol som en sannsynlighet – basert på observasjoner over mange år. Været utvikler seg egentlig deterministisk, men vi vet ikke nok om værtilstanden i dag til å forutsi hva været blir om noen måneder. Populært kalles akkurat dette kaotiske systemet for «sommerfugleffekten» - man ser for seg at om en sommerfugl svinger til venstre eller til høyre i Brasil så påvirker det været her lenge etter.

Mer om stokastiske forsøk

Stokastiske forsøk er altså slik at vi kan vite noe om andelen av de forskjellige utfallene i det lange løp, men ikke forutsi utfallet av ett, enkelt forsøk. Jeg minner om at sannsynlighetene for alle, mulig utfall, alltid summerer seg til 1 (100%). Det er jo helt sikkert at ett av dem inntreffer. I eksemplet ovenfor om «kron og mynt» antar vi altså at det ikke er mulig for mynten å bli stående på kant. Den må legge seg flatt – tror vi – slik at den viser enten «kron»-siden eller «mynt»-siden. Vi tror også at de to utfallene i det lange løp (egentlig i det uendelige) inntreffer like ofte. Begge deler er basert på lang erfaring. Det finnes ingen matematisk teori som kan *bevise* at det er slik.

Siden sannsynlighetsfordelingen alltid må baseres på lang erfaring, blir det ren gjetning å angi sannsynlighetene for et forsøk som aldri har vært gjort før. I et blad kan vi allikevel lese at det er 96,5% sannsynlighet for at takstmenn for hus/leiligheter vil bli erstattet av roboter i fremtiden (det var ikke angitt når «fremtiden» er – neste år? Om ti år? Femti år?). En slik angivelse av sannsynligheten er svært tvilsom. Dette har jo aldri skjedd før, så vi har ingen erfaring å basere sannsynligheten på.

Derimot kan det være helt OK å angi at det er 50% sjanse for regn i morgen. Det er i tilfelle basert på at det tidligere har regnet dagen etter halvparten av de gangen været har vært som i dag. Meteorologene fører nøye statistikk for slikt og de kan dessuten mate dagens vær inn i datamaskiner og simulere (gjøre «på liksom») utviklingen mange ganger og telle utfallene. Simuleringen er delvis stokastisk. For *yr.no* simuleres visstnok været tre ganger og en meteorolog velger den modellen som han/hun tror mest på. Deretter baseres alle varslene i yr.no på den valgte simuleringen. (Jeg tenker å vise noen slike simuleringer på datamaskin senere.)

Oppgave 1: Gå sammen to og to og kast «kron og mynt» 10 ganger. Noter andelen «kron» som en brøk mellom 0 og 1. Vi ser på resultatene.
Deretter summerer vi resultatene. Vi tenker at det tilsvarer at en gruppe kaster mange flere ganger. Vi ser på resultatene sammen. Jeg antar at vi vil se at andelen «kron» varierer sterkt mellom gruppene – men mindre sterkt for mange kast enn for de 10. Jeg skal så prøve å få vist et dataprogram der vi kan simulere svært mange kast og se hvordan andelen av «kron» blir da. Vanligvis vil andelen av «kron» bli nærmere ½ desto flere ganger vi kaster. Dette kalles «de store talls lov». Hva kan det komme av?

Ikke alt som er «tilfeldig» er stokastisk

Vi kan kanskje tro at vi i «sten, saks, papir» («SSP») velger like mange av hver i lengden, altså at sannsynlighet for hver av dem er 1/3, f.eks. P(«sten») = 1/3. Tror du på det?

Oppgave 2: Tenk på et tall mellom 1 og 10. Vi teller opp hva dere tenkte på. Ser andelene virkelig tilfeldig ut? Når folk sier de har valgt noe «tilfeldig» så er det vanligvis *ikke* stokastisk. Skal vi gjøre noe helt tilfeldig, bør vi trekke lodd, kaste terning, «kron og mynt» eller noe slikt.

Oppgave 3: Hvilket resultat av 10 kast med mynt ser mest sannsynlig ut (jeg dropper tegnet ∩ her):

A: KKKKKKKKKK

B: KMKMMKKMKK

Vi blir ofte lurt hvis vi bruker intuisjon på sannsynligheter. Det er *bare* erfaring over tid som kan gi sannsynlighetsfordelinger.

Forsøk med og uten «hukommelse»

Eksempel 5: Vi har fire kuler i en ugjennomsiktig pose. Det er to sort og to hvite. Vi rister posen godt og trekker (forsøk 1) én kule. Hva er sannsynligheten for at kulen er sort? Vi antar at alle kulene har samme sannsynlighet for å bli trukket ut. Da er P(sort) = ½. Vi legger kulen tilbake igjen i posen, rister den godt og prøver igjen (forsøk 2). Hva er nå sannsynligheten for å få sort? Den er fortsatt ½. Situasjonen er jo nøyaktig lik i forsøk 2 som i forsøk 1. Mange slike forsøk vil vise at vi har rett i det (det har vært prøvd). Vi kan si at når kulen som er trukket legges tilbake igjen, så har systemet ingen «hukommelse» og sannsynlighetsfordelingen er uforandret. (Forsøket kalles «trekning med tilbakelegging».) Sannsynlighetsteoretisk heter det at de to forsøkene *er stokastiske og uavhengige*.

Sannsynligheten for å få to sorte (med tilbakelegging) er da som for kron og mynt ovenfor:

$$P(S \cap S) = P(S) \cdot P(S) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}$$

Eksempel 6: Vi begynner nå på nytt og trekker først en kule (forsøk 1). Anta at den ble sort – sannsynligheten for det er ½. *Uten å legge den tilbake* i posen igjen, trekker vi en kule til av de tre som er igjen (forsøk 2). Hva er sannsynligheten for at kulen i forsøk 2 også skal bli sort? Forklar! (Slike forsøk kalles «trekning uten tilbakelegging».)

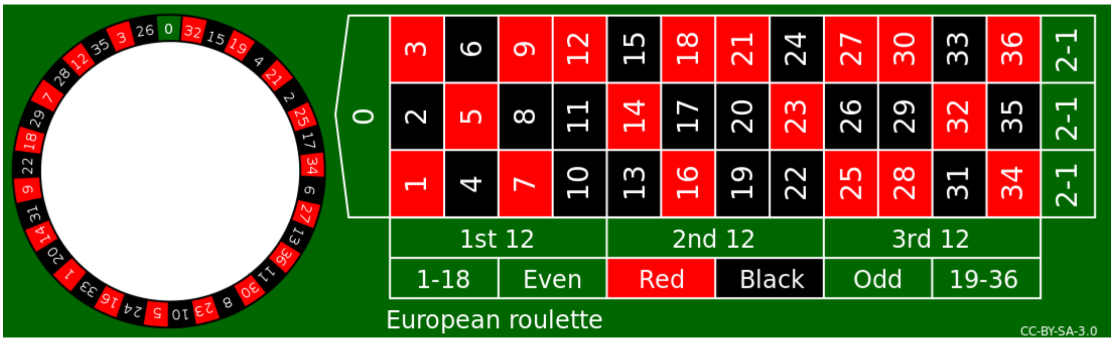
Sannsynligheten for å få to sorte (uten tilbakelegging) er da

$$P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) \cdot P(S_2 \mid S_1) = {}^1\!/_2 \cdot {}^1\!/_3 = {}^1\!/_6$$

Her leses $P(S_2 \mid S_1)$ som «sannsynligheten for S_2 gitt S_1» som er den betingede sannsynligheten for å få S i andre forsøk, gitt at vi fikk S i første. (Det er den loddrette streken som skal bety «gitt at» eller «betinget av at».) Sannsynligheten i forsøk 2 kalles *betinget sannsynlighet*. Sannsynlighets-fordelingen i forsøk 2 er betinget av hva som skjedde i forsøk 1. Det innebærer at sannsynlighetsfordelingen endrer seg fra forsøk 1 (med fire kuler i posen) til forsøk 2 (med bare tre kuler i posen) og endringen avhenger av hva som ble utfallet i forsøk 1. I sannsynlighetsteorien heter det at de to begivenhetene *er stokastiske men avhengige*.

Anta nå at også forsøk 2 ga en sort kule. Vi trekker igjen fra posen – forsøk 3. Hva er *nå* sjansen for å få en sort kule for tredje gang? Forklar!

Oppgave 4: Kast 10 ganger med mynten. Noter resultatet som KKMKM osv. Se litt på resultatet og prøv så å gjette om det blir K eller M i det 11. kastet. Vi sammenlikner og ser hvor mange som gjettet riktig.



Mange tror at forsøk har «hukommelse». F.eks. vil mange satse på «Red» hvis en rulett har vist «Black» mange ganger på rad: BBBB. De synes det snart må komme en rød for å «få balanse». Ruletten er imidlertid uten «hukommelse» og rød/sort er like sannsynlige uansett tidligere resultatet så BBBBR er akkurat like sannsynlig som BBBBB[2]. Tilsvarende kan vi i noen aviser lese at i Lotto «er det lenge siden tallet 5 har vært trukket ut». Det skal altså råde deg til å velge 5 denne gang. (Faktisk blir premien mindre hvis du velger de samme tallene som mange andre.)

Pass på! Det kan være avhengighet som ikke synes så lett.

Oppgave 5: En familie har fått fire barn som alle er gutter. Nå er konen gravid igjen. Hva er sannsynligheten for at det femte barnet blir en gutt? Diskuter dette – er begivenhetene uavhengige eller kan det faktum at familien allerede ha fire gutter påvirke sannsynligheten for at den femte også er en gutt?

Eksempel 7: En forsikringstaker har hatt fire uhell med bilen de siste tyve årene. Forsikringsselskapene vil da *ikke* beregne samme premie for denne forsikringstakeren som for en annen som har vært uten uhell siste tyve år. De vil ha høyere premie. De tror altså *ikke* at sannsynligheten for uhell neste år er *uavhengig* av antall tidligere uhell – de antar at det har noe å gjøre med personen, kjøremønsteret eller annet. Generelt prøver selskapene å beregne *risikoen* utfra tidligere erfaring med denne personen, med bosted, type bil, alder osv.

Terninger og hypotesetesting

Eksempel 8: Terninger som kastes ender med å bli liggende med én av siden opp. Vi tror ikke noe på at den blir stående å vippe på en kant eller et hjørne. Siden som ligger opp, viser et antall «øyne» - 1, 2, 3, 4, 5 eller 6. Antar vi at alle er like sannsynlige (OBS! Det kan jukses med terninger!) har hvert av de seks utfallene sannsynlighet P(i) = 1/6 for alle i = {1, 2, … 6}. Summen av disse er til sammen 1. Det beskriver sannsynlighetsfordelingen.

Vi kaster to terninger samtidig og er opptatt av hva sannsynligheten er for at terningen tilsammen skal vise 7. Vi begynner med å lage en **modell**. Den kan se slik ut:

[2] Sannsynligheten kan se ut til å være ½ men det finnes en lomme 0 og da vinner banken alt. Det er det banken tjener på.

Modell A

Sum	Kombinasjon	P(Sum)
2	1+1	1/21=4,76%
3	2+1	1/21=4,76%
4	3+1, 2+2	2/21=9,52%
5	4+1, 3+2	2/21=9,52%
6	5+1, 4+2, 3+3	3/21=14,29%
7	6+1, 5+2, 4+3	3/21=14,29%
8	6+2, 5+3, 4+4	3/21=14,29%
9	6+3, 5+4	2/21=9,52%
10	6+4, 5+5	2/21=9,52%
11	6+5	1/21=4,76%
12	6+6	1/21=4,75%
	Alle:	*21/21=99,99%*

Jeg har listet opp alle mulige kombinasjoner som gir en viss sum. Det gir i alt 21 forskjellige kombinasjoner. For eksempel kan man få summen 7 med 6 på én terning og 1 på den andre, eller 5 og 2 eller 4 og 3. På tre, forskjellige måter. Antar vi at alle er like sannsynlige har hver av dem sannsynlig 1/21. Denne modellen er min teori – min *hypotese*.

Det er tre måter av 21 å få summen syv på. Hvis alle er like sannsynlige, skulle det gir sannsynlighet P(sum=7) = 3/21 = 1/7 = 14,3%.

Oppgave 6: Dere skal teste (erfare) om denne modellen kan være riktig. Kast 50 ganger med to terninger og tell opp hvor mange ganger summen blir 7. Ser det ut til at modellen stemmer etter ditt forsøk?

Hvis resultatet ikke stemmer så kan det skyldes tilfeldigheter eller at hypotesen er feil. I stokastiske forsøk er det svært sjelden at resultatet blir akkurat som forventet utfra hypotesen. Statistikere vil da forsøke å beregne hvor sannsynlig det er å få et så stort avvik som du fikk. Hvis sannsynligheten er mindre enn et tall som er bestemt på forhånd – gjerne 5% eller 1% – vil de *forkaste* hypotesen. Den antas da å være gal. Ellers er hypotesen *styrket* (men ikke *bevist*). Selv om ett forsøk viser at hypotesen ser ut til å stemme, vil man ikke godta den før den er testet flere ganger og av andre vitenskapsfolk.

Jeg tenker å vise et program der vi kan kaste to terninger svært mange ganger. Da bør vi kunne se om hypotesen virker rimelig. Vi vil nok se at hypotesen er urimelig – modellen er feil.

Oppgave 7: Prøv å tenke ut en annen modell, *modell B*, for dette. Det kan hjelpe å tenke på de to terningen som en rød og en blå. Vi sammenlikner med mitt dataprogram om den nye modellen er mer rimelig. I så fall forkaster vi den første og satser på den andre.

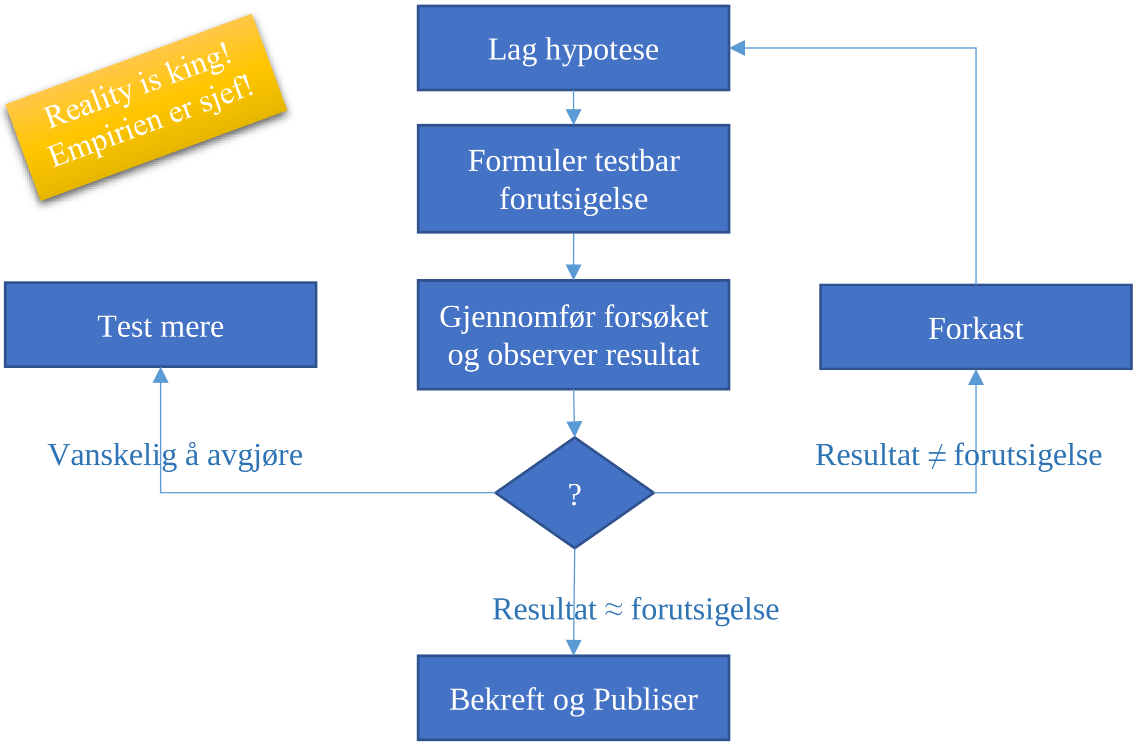
Naturvitenskapelig metode

Dette er et eksempel på naturvitenskapelig metode[3]:

1. Lag en modell som du tror på. Den skal begrunnes (ren gjetning holder ikke). Den kalles *hypotesen*.
2. Lag en testbar forutsigelse ut fra hypotesen (dvs. modellen)
3. Gjennomfør forsøket og observer resultatet

[3] *Samfunnsvitenskapene* (bl.a. samfunnsøkonomi, sosiologi, statsvitenskap og kriminologi) og *humaniora* (bl.a. litteraturvitenskap, historie, teologi og filosofi) har egne forskningsmetoder.

4. Sammenlikn resultatet av forsøket med forutsigelsen. Du kan få tre forskjellige resultater:
    a. Resultatet er langt fra som forutsatt (det er usannsynlig at tilfeldigheter og målefeil kan gi så annerledes resultat): Hypotesen forkastes. Start igjen fra 1.
    b. Resultatet er som forutsatt eller svært når: Hypotesen er bekreftet (*ikke* bevist!). Vi publiserer en artikkel.
    c. Hverken a eller b – resultatet er ganske annerledes enn forventet, men det er ikke helt umulig å tro at det kan skyldes tilfeldigheter/målefeil: Gjør flere forsøk.



Når et resultat publiseres, vil andre, interesserte forskere med kompetanse se på det. De vil nøye studere designet (metoden som er brukt). De andre forsøker å få det samme eller å forkaste den. Etter hvert som mange har fått samme resultat og ingen klarer å forkaste den, aksepterer vi hypotesen (modellen) som sannsynligvis sann. Da kalles den gjerne en *teori*[4]. Det er ikke mulig å *bevise* at en hypotese er riktig. Albert Einstein sa det slik: «No amount of experimentation can ever prove me right; a single experiment can prove me wrong.»[5]

Sannsynligheten for kombinasjoner av utfall

Hvis vi kjenner sannsynligheten for enkeltutfall, kan vi beregne sannsynligheten for kombinasjoner av flere utfall. Hvis vi lurer på sannsynlighet for at «enten det ene eller det andre» utfallet blir resultatet av ett forsøk, kan enkeltsannsynlighetene *legges* sammen. Pass på at forsøkene er *uavhengige* av hverandre.

Eksempel 9: Hva er sannsynligheten for at et terningkast gir enten 1 eller 2? Sannsynligheten for hver av dem er 1/6. P(1 **U** 2) = P(1) + P(2) = 1/6 + 1/6 = 1/3. Hva er sannsynligheten for å få minst 4? P(≥ 4) = P(4 **U** 5 **U** 6) = P(4) + P(5) + P(6) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2. Dette tenker jeg å teste ut med terningsimulatoren min.

[4] Det er der vi nå er med klimamodellen til FNs klimapanel, selv om alle er enige om at modellen ikke er nøyaktig. De som har forsøkt å vise at temperaturendringene skyldes andre ting enn det klimapanelet har lagt inn, har ennå ikke klart det. Hver gang noen prøver og feiler, styrker det troen på klimamodellen.

[5] Hittil har en mengde forsøk bekreftet Einsteins hypoteser, ingen har ført til forkastelse (man har prøvd!). De beskrives derfor nå som *teorier*.

Hvis vi vil ha sannsynligheten for at «både det ene og det andre» utfallet skal bli resultatet, kan sannsynlighetene for de to ganges med hverandre. Pass på at det kan være nødvendig å bruke den betingede sannsynligheten for utfall nummer to.

Eksempel 10: Hva er sannsynligheten for at en terning skal vise 1 i første kast og deretter minst fire i andre kast? P(1 **og** minst 4) = P(1) · P(minst 4) = 1/6 · 1/2 = 1/12.

Oppgave 8: Hva er sannsynligheten for å få to *like* terninger ved kast med to? Beregn først, sammenlikn så med modellen vi brukte for å finne sannsynligheten for å få summen 7 ovenfor.

Oppgave 9: Hva er sannsynligheten for å få to *ulike* terninger ved kast med to? Tell opp i modellen.

Her kan det være på tide å vise et lite «triks». Siden sannsynlighetsmodellen må summere til 1, kan vi se at sannsynligheten for å få et utfall og sannsynligheten for alle andre utfall til sammen, må være 1. Altså

$P(x) + P(\bar{x}) = 1$ der x med strek over skal bety «ikke x». Da er også

$P(x) = 1 - P(\bar{x})$

Oppgave 10: Løs oppgave 9 med den nye formelen. (*Vink:* Du beregnet sannsynligheten for to like i oppgave 8.)

Oppgave 11: Du har en pose med tre hvite og tre sorte terninger. Hva er sannsynligheten for å trekke (a) to sorte med tilbakelegging og (b) to sorte uten tilbakelegging? (c) Hva er sannsynligheten for å trekke to like med tilbakelegging og (d) to like uten tilbakelegging?

Oppgave 12: I en kortstokk er det fire farger (spar, hjerter, ruter og kløver). To av fargene er «sorte», to er «røde». Det er tretten kort i hver farge, til sammen 52 kort. I hver farge er det verdiene 2, 3, 4 … 9, 10, knekt, dame, konge og ess.

(a) Hva er sannsynligheten for å trekke et rødt kort fra en full, godt blandet kortstokk? (b) Hva er sannsynligheten for å trekke først et ess og så – uten tilbakelegging – ett ess til? (c) Hva er sannsynligheten for å trekke – uten tilbakelegging – tre hjerter etter hverandre? (d) Hva er sannsynligheten for å trekke 13 hjerter etter hverandre uten tilbakelegging (sett opp uttrykket, du behøver ikke å regne ut)? (e) Hva blir da sannsynligheten for å trekke 13 kort i samme farge (sett opp uttrykket uten å regne ut)?

Merk at i oppgaven ovenfor kaller jeg det å «trekke kort uten tilbakelegging». Det er akkurat det samme som når kortene deles ut. Det er selvsagt avgjørende at kortstokken er blandet godt først, så kortene ligger i tilfeldig (i stokastisk forstand) rekkefølge.

Oppgave 13: (a) Hva er sannsynligheten for å kaste fem «kron» etter hverandre med en mynt? (b) Anta at sjansen for å få en gutt er 51,4%. Anta videre at utfallene er uavhengige av hverandre (det er ikke helt riktig[6]). Hva er i så fall sjansen for at en familie med tre barn bare har gutter? (c) Alle tre barna har samme kjønn? (d) Nabofamilien har fire gutter – hva er sannsynligheten for det?

[6] En artig artikkel om dette er skrevet av Helge Brunborg, Statistisk Sentralbyrå og publisert på https://www.ssb.no/befolkning/artikler-og-publikasjoner/blir-det-gutt-eller-jente. Her står det bl.a.
«Foreldre i Norge er lite opptatt av om de får gutter eller jenter - de fleste ønsker å ha barn av begge kjønn. Kvinner med barn av samme kjønn får hyppigere ett barn til enn dem som har både gutt og jente fra før. Sannsynligheten for å få en jente øker med antall jenter i søskenflokken. Det samme gjelder gutter, men mønsteret er mer uklart. Par som forsøker å få barn av motsatt kjønn, har derfor stadig mindre sjanse for å lykkes, viser en analyse av 2,8 millioner fødte fra 1950 til 2007.»
Det ser altså ut til at de som har barn av begge kjønn er tilfreds med og stopper der, mens de som har barn av samme kjønn prøver igjen (antakelig for å få et barn av den «manglende» kjønnet?). Legg også merke til at kjønnet er en betinget sannsynlighet. Se artikkelen for detaljer – den er full av begreper som er tatt opp av meg ovenfor.

Eksempel 11: I et land vurderer man å gjennomføre screening for den farlige sykdommen μ. Sykdommen kan behandles hvis den oppdages. Man regner med at 1‰ av befolkningen i en viss aldersgruppe har sykdommen (1 pr 1000 innbyggere). Man har en test for μ som er 99% sikker[7]. Bør man gjennomføre en screening av to millioner innbyggere i risikogruppen?

1. μ-syke – har μ

Antall syke: 2000	1‰ av 2 000 000
μ-positive: 1 980	99% av 2 000 (testen viser korrekt at de har μ)
μ-negative: 20	2 000 – 1 980 (testen viser ikke at de har μ = «falske negative»)

2. μ-friske – har ikke μ

Antall friske: 1 998 000	2 000 000 – 2 000
μ-positive: 19 980	1% av 1 998 000 (testen viser at de har μ – «falske positive»)
μ-negative: 1 978 020	2 000 000 – 19 980 (testen viser korrekt at de ikke har μ)

3. μ-positive – testen tyder på at de kan ha μ

Riktige	1 980	9%
Gale	19 980	91%
Sum	21 960	100%

Konklusjon: En liten andel μ-syke (20 personer) blir ikke oppdaget. De kan få en falsk trygghet. Mange friske (19 800 personer) får beskjed om at de kan ha μ. Hele 91% av de μ –positive er faktisk friske. De må ta belastningen med å tro at de kan være syke til situasjonen er nærmere avklart og alle må sjekkes ut. Altså: Når man vil screene for en sjelden sykdom, bør man ha en meget nøyaktig test.

Eksempel 12: I en klasse er det 30 elever. Hva er sannsynligheten *P(x)* for at minst to har fødselsdag samme dag[8]? Her kan vi starte opp med en lang tankerekke og finne sannsynligheten for at to elever har fødselsdag samme dag, tre elever har samme dag osv. opp til at alle 30 har fødselsdag samme dag. Det blir ganske tungt! Isteden utnytter vi formelen $P(x) = 1 - P(\bar{x})$. Vi søker altså først sannsynligheten $P(\bar{x})$ for at *ingen* har fødselsdag samme dag. Da tenker vi oss en kalender og så streker vi over én og én dato etter hvert som elevene oppgir sin fødselsdag. Vi vil vite sannsynligheten for at datoen vi streker over ikke er streket over fra før. Dette er et system uten tilbakelegging, da flere og flere datoer er «opptatt» og sannsynligheten for å treffe en som er «ledig» blir mindre og mindre. Den første kan vi streke over hvor som helst (alle datoer er «ledige»). Den andre må ha fødselsdag på en av de 364 «ledige» datoene, den tredje på en av de gjenværende 363 datoen osv. Siden alle disse må inntreffe *samtidig*, må sannsynlighetene ganges med hverandre – altså:

$$P(\bar{x}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{336}{365} = 0{,}294$$

Herav $P(x) = 1 - P(\bar{x}) = 1 - 0{,}294 = 0{,}706 = 70{,}6\%$

Det er ca 70% sannsynlighet for at minst to elever har fødselsdag samme dag.

Note: Legg merke til hvor raskt svaret blir lite når man multipliserer mange ganger med et tall mindre enn 1. F.eks. er $0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$ og $0{,}9^{10} \approx 0{,}35$.

[7] Vi antar her at det er lik sannsynlighet – 1% – for falske positive og falske negative resultater. Ofte er det forskjell på disse.

[8] Glem skuddår denne gang! Vi antar også – uten å si det – at klassen er sammensatt stokastisk. Vi ser helt bort fra at fødsler ikke fordeler seg jevnt utover året. Juli og august er «populære» måneder med hhv 5 566 og 5 562 fødsler i 2011. Desember er mest «upopulær» med bare 4 400 fødsler. Det vil innebære at sannsynligheten for at minst to i en gruppe på 30 har samme fødselsdag, nok er større enn 0,706.